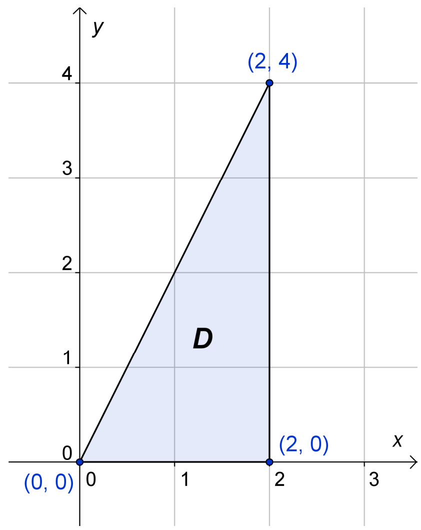
Concept tentamenopgave voor tentamen Vector Analyse juli 2008

a. Waarom weet je dat $f(x, y) = (x^2 - 1)(1 - y^2)$ een globaal minimum en een globaal maximum aanneemt op het gesloten domein D?



b. Bepaal de posities van alle kandidaats globale minimum en kandidaats globale maxima

c. Geef het globale minimum en het globale maximum.

Concept tentamenopgave voor tentamen Vector Analyse juli 2008 – Uitwerking

a. Waarom weet je dat $f(x,y)=(x^2-1)(1-y^2)$ een globaal minimum en een globaal maximum aanneemt op het gesloten domein *D*?
D is begrensd alsmede gesloten en *f* is continu. Het Extreme Value Theorem geeft dat onder deze voorwaarden *f* op *D* een globaal minimum en een globaal maximum aanneemt.

b. Bepaal de posities en waarden van alle kandidaats globale minimum en kandidaats globale maxima en geef vervolgens het globale minimum en maximum.
Om de posities van alle kandidaats globale min en max op domein *D* te vinden moet er naar drie dingen worden gekeken:

(i) de extrema op het oppervlak
(ii) de extrema van de randlijnen
(iii) de waarden van de hoekpunten.

Bepaling extrema van (i):
Om de extrema op het oppervlak te bepalen stellen we Df gelijk aan nul:

$$Df=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\cdot(1-y^2)\\ -2y\cdot(x^2-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Hieruit volgen de extrema op *D* (er zijn ook extrema met $x=-1$ en/of $y=-1$, maar die vallen buiten *D*):

$$\begin{aligned}(x,y)&=(0,0) &\Rightarrow f(0,0)&=-1\\ (x,y)&=(1,1) &\Rightarrow f(1,1)&=0\end{aligned} \tag{1}$$

Bepaling extrema van (ii):
Voor de onderste lijn geldt: $y=0$, dus de functie f_{r1} op deze rand wordt gegeven door:

$$f_{r1}(x,0)=(x^2-1).$$

De differentiaal hiervan gelijk stellen aan 0 resulteert in:

$$\frac{df_{r1}(x,0)}{dx}=x=0 \;\Rightarrow\; x=0.$$

Dus op deze lijn vinden we alleen een extremum dat we al hadden, namelijk $(x,y)=(0,0)$.

Voor de verticale lijn geldt: $x=2$, dus de functie f_{r2} op deze rand wordt gegeven door:

$$f_{r2}(2,y)=3(1-y^2).$$

De differentiaal hiervan gelijk stellen aan 0 resulteert in:

$$\frac{df_{r2}(0,y)}{dy}=-6y=0 \;\Rightarrow\; y=0.$$

Dus op deze lijn vinden we alleen een extremum dat we al hadden, namelijk $(x,y)=(0,0)$.

De schuine lijn f_{r3} kunnen we als volgt parametriseren:

$$f_{r3}(t,2t)=(t^2-1)(1-4t^2)=-4t^4+5t^2-1.$$

De differentiaal hiervan gelijk stellen aan 0 resulteert in:

$$\frac{df_{r3}(t,2t)}{dt} = -16t^3 + 10t = 0 \;\Rightarrow\; t = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{5}{8}} \end{cases}.$$

Als $t = 0 \;\Rightarrow\; (x, y) = (0,0)$ en dit extremum hadden we al.

Als $t = -\sqrt{\frac{5}{8}} \;\Rightarrow\; x < 0$ en $y < 0$, dus dit punt ligt niet in *D*.

Dus het enige nieuwe extremum dat op (de rand van) *D* ligt is:

$$(x, y) = (\sqrt{\tfrac{5}{8}}, 2\sqrt{\tfrac{5}{8}}) \;\Rightarrow\; f(\sqrt{\tfrac{5}{8}}, 2\sqrt{\tfrac{5}{8}}) = 0.5625 \tag{2}$$

Bepaling waarden van hoekpunten (iii):

De hoekpunten en bijbehorende waarden worden gegeven door:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= -1 \\ f(2,0) &= 3 \\ f(4,2) &= -4.5 \end{aligned} \tag{3}$$

c. Geef het globale minimum en het globale maximum.

Vergelijking van de waarden van (1), (2) en (3) geeft dat $(2,0)$ het globale maximum is en $(4,2)$ het globale minimum.